Acta Sci. Math., 38 (1976), 165—166

Ringe, in welchen jedes Element ein Linksmultiplikator ist

F. SZÁSZ

Das Ziel dieser Note ist das im Buche [7] des Verfassers gestellte Problem 82 zu lösen: „In welchen Ringen ist jedes Element ein Linksmultiplikator?"

Unter einem Ring verstehen wir hierbei immer einen assoziativen Ring. Bezüglich der benötigten Grundbegriffe verweisen wir auf N. DIVINSKY [2], N. JACOBSON [3], L. RÉDEI [4] und auf [7].

Unter einem Linksmultiplikator l eines Ringes A verstehen wir ein Element von A, für das es eine ganze rationale Zahl n gibt, so dass $lx=nx$ für jedes $x\in A$ gilt. Im Ring Z der ganzen rationalen Zahlen ist also jedes Element ein Linksmultiplikator. Die Linksmultiplikatoren sind Verallgemeinerungen der Linkseinselemente eines Ringes. Bezüglich der Existenz des Einselementes eines Ringes spielen übrigens auch die Linksmultiplikatoren eine wichtige Rolle, wie es die Arbeiten B. BROWN—N. H. McCOY [1], F. SZÁSZ [5] und [6], witherin J. SZENDREI [8] zeigen. Andererseits ist jedes Element a^* des Linksannullatorideals A^* des Ringes A offenbar ein Linksmultiplikator, denn es gilt

$$a^*\cdot x = 0\cdot x = 0 \quad \text{für} \quad \text{jedes } x\in A.$$

Satz. *In einem Ring A ist jedes Element von A dann und nur dann ein Linksmultiplikator, wenn sich jedes Element $a\in A$ in der Gestalt einer Summe ka_0+a^* $(k\in Z)$ darstellen läßt, wobei $a_0x=n_0x$, $n_0\in Z$, $n_0>0$ und $a^*\in A^*$, also $a^*y=0$ für jede $x, y\in A$ bestehen.*

Bemerkung. Die zyklische additive Gruppe $(Za_0)^+$ erzeugt mod A^* den ganzen Ring, denn es gilt $(A/A^*)^+\cong(Za_0)^+$.

Beweis. Nehmen wir an, dass jedes Element des Ringes ein Linksmultiplikator ist. Gilt $A^*=A$, so ist jedes Element, als ein Linksannullator, auch ein Linksmultiplikator. Gilt aber $a\cdot A\neq 0$, so gibt es wegen der Definition eines Linksmultiplikators eine von Null verschiedene ganze Zahl $n\in Z$, so dass $(a-n)\cdot A=0$ gilt. Wählen wir

Eingegangen am 14. Mai 1975.

jetzt das Element $a_0 \in A$ so, dass die enstprechende von Null verschiedene ganze Zahl $n_0 \in Z$ mit $(a_0 - n_0) \cdot A = 0$ in Absolutbetrag möglichst klein sei. Wir können voraussetzen, dass $n_0 > 0$ ist; sonst wählen wir $-a_0$ statt a_0.

Es sei nun $n = kn_0 + r$ mit $0 \leqq r < n_0$ und $b = a - ka_0$. Dann bestehen die Gleichungen:

$$bx = ax - ka_0x = nx - kn_0x = (n - kn_0)x = rx$$

für jedes $x \in A$, woraus man $(b-r) \cdot A = 0$ erhält. Wegen der Minimalität von n_0, wegen $0 \leqq r < n_0$ und $(b-r) \cdot A = 0$ ergibt sich $r=0$, $rx=0$, $bx=0$ und somit ist $b = a^* \in A^*$ ein Linksannullator. Hiernach gilt aber $a = ka_0 + b = ka_0 + a^*$.

Umgekehrt nehmen wir an, daß $a = ka_0 + a^*$ gilt, wobei $a_0 \cdot x = n_0 x$ und $a^* \cdot y = 0$ für jedes $x, y \in A$ bestehen. Dann erhält man für jedes $x \in A$ die Gleichungen:

$$ax = (ka_0 + a^*)x = ka_0x = (kn_0)x.$$

Damit haben wir den Satz bewiesen und auch Problem 82 gelöst.

Literaturverzeichnis

[1] B. Brown—N. H. McCoy, Rings with unit element, which contain a given ring, *Duke Math. J.* **13** (1946), 9—20.

[2] N. Divinsky, *Rings and Radicals* (London, 1965).

[3] N. Jacobson, *Structure of Rings* (Providence, 1956).

[4] L. Rédei, *Algebra.* I (Leipzig, 1959).

[5] F. Szász, Einige Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 31—37.

[6] F. Szász, Reduktion eines Problems bezüglich der Brown-McCoyschen Radikalringe, *Acta Sci. Math.*, **31** (1970), 167—172.

[7] F. Szász, *Radikale der Ringe* (Budapest—Berlin, 1975).

[8] J. Szendrei, On the extension of rings without divisors of zero, *Acta Sci. Math.* **13** (1949—50), 231—234.

MATH. INSTITUT UNGAR. AKAD. WISS.
REÁLTANODA-U. 13—15
1053 BUDAPEST, UNGARN